

Série n°13 – 22 mai 2025

Propriétés électriques, magnétiques et optiques

Exercice 1 :

Répondez par vrai ou faux aux questions suivantes :

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| Vrai | Faux |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
- a. Les conducteurs ont une résistivité électrique qui augmente avec la température alors que c'est l'inverse pour les semi-conducteurs.

- b. Lorsque l'on applique une différence de potentiel à un métal, le courant électrique circule presque instantanément car les électrons libres qu'il contient ont une vitesse très élevée, proche de celle de la lumière.

C'est faux (voir Ex. 2 de cette série). Le matériau étant rempli d'électrons libres, le courant circule presqu'instantanément en son sein grâce à la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques de l'ordre de grandeur de celle de la lumière dans un conducteur.

- c. L'ajout d'éléments de soluté tels que l'étain dans le cuivre (bronze) diminue sa résistivité électrique.

C'est faux. La plupart des éléments de soluté comme l'étain dans un métal pur diminuent sa conductivité électrique, exception faite bien sûr de certains alliages supraconducteurs, tels NbTi ou Nb₃Sn, dont la résistivité tombe quasiment à 0 à très basse température.

- d. La bande de conduction d'un semi-conducteur non-dopé est toujours occupée quelle que soit la température.

C'est faux. La densité d'électrons dans la bande de conduction d'un semiconducteur augmente avec la température, et donc nulle à très basse température

- e. Le potentiel disruptif d'un matériau isolant est la tension au-delà de laquelle un claquage a lieu dans le matériau, créant un canal de ionisation dans lequel circule un courant, de manière analogue à un éclair dans l'atmosphère.

- f. Un dipôle électrique est le produit d'une charge par une distance (As m), la polarisation d'un matériau correspondant à une densité de dipôles électriques (As/m²).

- g. La permittivité diélectrique ϵ_0 et la perméabilité magnétique du vide μ_0 sont liées à la vitesse de la lumière.

La relation, liée aux ondes électromagnétiques est $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$

- h. Le moment magnétique d'un atome est uniquement dû au spin des électrons.

C'est inexact : Il est fortement lié au spin des électrons (des couches non-complètement remplies ou des électrons libres dans un métal), mais le moment magnétique orbital doit aussi être considéré.

- i. *Un ferroélectrique pour les dipôles électriques d'un matériau est l'analogue d'un ferromagnétique pour les moments magnétiques : tous deux possèdent un cycle d'hystérèse qui dissipe de l'énergie lors d'un cycle (du champ électrique pour le premier, du champ magnétique pour le second).*
- j. *Pour qu'un matériau soit ferromagnétique, il suffit que chaque atome possède un moment magnétique.*

C'est une condition nécessaire, mais pas suffisante, qui définit un matériau paramagnétique. Pour que cela soit un ferromagnétique, il faut qu'il y ait une transition de phase à une température de Curie en-dessous de laquelle les moments magnétiques s'orientent spontanément avec formation de domaines de Weiss.

- k. *Le magnéton de Bohr, mesuré en Am^2 , est une grandeur caractéristique qui permet d'évaluer les moments magnétiques associés au spin et au mouvement orbital d'un électron.*
- l. *Un matériau paramagnétique peut garder son aimantation hors d'un champ magnétique.*

C'est faux : un matériau paramagnétique a des moments magnétiques qui s'orientent dans un champ magnétique mais ceux-ci redeviennent aléatoirement orientés hors du champ.

- m. *Dans un domaine de Weiss d'un matériau ferromagnétique, l'aimantation est égale à l'aimantation à saturation.*

C'est exact puisque dans un domaine de Weiss, les moments magnétiques ont tous la même orientation.

- n. *Le rouge ayant une longueur d'onde plus grande que le bleu, le photon rouge a une énergie plus élevée que le photon bleu.*

C'est faux : l'énergie d'un photon $E = h\nu = hc/\lambda$. Donc, plus la longueur d'onde λ est élevée, plus sa fréquence ν , et donc son énergie, est faible

- o. *Le coefficient d'absorption d'un matériau transparent ou semi-transparent mesure l'intensité transmise dans le matériau divisée par l'intensité du faisceau incident.*

C'est faux : le coefficient d'absorption mesure l'atténuation de l'onde transmise avec la distance parcourue dans le matériau.

- p. *L'indice de réfraction d'un matériau transparent ou semi-transparent est proportionnel à $\epsilon_r^{1/2}$.*

- q. *Un métal est quasiment opaque pour un large spectre de longueurs d'onde car la bande de conduction est occupée par des électrons.*

C'est exact : quelle que soit la longueur de la lumière visible et donc l'énergie du photon, l'onde électromagnétique peut exciter les électrons libres du métal qui réémettent un photon vers l'extérieur et ne pénètre le métal que sur une profondeur de quelques nm.

- r. *Une vitre est en verre car les joints de grains qu'elle contient sont très peu diffusants, la rendant ainsi transparente.*

C'est faux : Le verre à base de silice est amorphe et ne contient donc pas de joints de grain qui diffusent la lumière, ce qui n'est pas le cas de la silice polycristalline.

- s. *Le silicium est opaque à la lumière parce que son gap d'énergie entre bande de valence et bande de conduction est faible, alors que la silice (SiO_2) a un coefficient d'absorption faible parce que son gap d'énergie est élevée.*
- t. *Des photons peuvent induire une transition des électrons de la bande de valence à la bande de conduction d'un diélectrique quelle que soit leur fréquence, pour autant qu'ils soient suffisamment nombreux, i.e. que l'intensité soit suffisamment élevée.*

C'est faux : c'est toute la différence entre la vision ondulatoire de la lumière (apportée par la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell) et la vision particulière des photons (apportée par la mécanique quantique de Planck et l'explication de l'effet photoélectrique par Einstein). Il faut que le photon d'énergie hv soit plus grande ou égale au gap d'énergie du diélectrique pour induire une transition, le nombre de photons (l'intensité de la lumière) déterminant alors le nombre de transitions par seconde.

Exercice 2 : Conductivité du cuivre et du bronze

La résistivité électrique ρ_e du cuivre à température ambiante vaut $1.7 \mu\Omega \text{ cm}$ et augmente avec la température avec un coefficient $\alpha_{\rho_e} = \rho_e^{-1} (d\rho_e/dT) = 3.9 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. On demande de calculer :

- a. *le temps caractéristique τ d'interaction des électrons libres dans le réseau des ions de cuivre, à température ambiante et à 100 °C, sachant que chaque atome met à disposition 1 électron de conduction.*

Densité du cuivre : $8'960 \text{ kg/m}^3$, masse molaire du cuivre : 63.5 g/mole , structure cfc.

On part de la relation établie dans le cours :

$$\rho_e = \frac{1}{\sigma_e} = \frac{m_e}{e^2 n_e \tau}$$

avec $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ As}$. Connaissant ρ_e , il suffit de calculer encore la densité d'électrons n_e pour pouvoir déduire τ . Chaque atome contribuant à 1 électron de conduction, la densité d'électrons libres n_e est donnée par :

$$n_e = \frac{N_A}{M_m} \rho = \frac{6.022 \times 10^{23} \text{ mole}^{-1}}{0.0635 \text{ kg/mole}} 8'960 \text{ kg/m}^3 = 8.497 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

Le temps d'interaction avec les ions de Cu est donc donné à température ambiante par :

$$\tau = \frac{m_e}{e^2 n_e \rho_e} = \frac{9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ As})^2 (8.497 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(1.7 \times 10^{-8} \Omega\text{m})} = 2.46 \times 10^{-14} \text{ s}$$

Remarque : pour les unités, se souvenir que AV est une puissance, i.e. J/s

A 100°C, la résistivité électrique vaut : $\rho_e = \rho_{e0}(1 + \alpha_{\rho_e}\Delta T) = 2.23 \mu\Omega\text{cm}$ (pour $\Delta T = 80^\circ\text{C}$). Le temps d'interaction sera donc diminué à :

$$\tau = 1.88 \times 10^{-14} \text{ s}$$

- b. la vitesse actuelle moyenne des électrons pour la densité maximum de courant admissible dans des fils de cuivre ($5 \times 10^6 \text{ A/m}^2$) ?

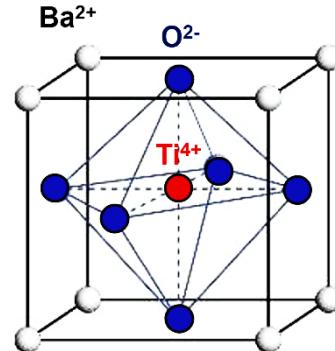
La vitesse des électrons, solution de l'équation de Drude, est donnée par la relation :

$$j_e = -en_e v$$

$$|v| = \frac{j_e}{en_e} = \frac{5 \times 10^6 \text{ A/m}^2}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ As})(8.497 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})} = 3.68 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

Exercice 3 : Titanate de baryum

Le titanate de baryum (BaTiO_3) est une céramique ferroélectrique dont la maille élémentaire est donnée ci-dessous dans sa forme cubique non-polarisée (stable au-dessus de sa température de Curie, 120 – 130 °C). À température ambiante, le cation Ti^{4+} quitte le centre de la maille et se déplace de 0.25 Å en direction de l'un des atomes d'oxygène, rendant la maille tétragonale : la base carrée de la maille cubique reste la même alors que le côté perpendiculaire du cube s'allonge légèrement. Cette rupture de symétrie dans la répartition des charges crée un dipôle électrique dans chacune des mailles élémentaires du cristal, dont les paramètres de maille sont $a = 3.904 \text{ \AA}$ et $c = 4.150 \text{ \AA}$.



- a. Quel est alors le dipôle électrique apparaissant dans chaque maille de la structure tétragonale ?

Le dipôle électrique apparaissant dans chaque maille est donné par :

$$\vec{p} = q\vec{\delta} = 4q_e\vec{\delta} \quad \text{soit} \quad |\vec{p}| = 1.6 \times 10^{-29} \text{ As m}$$

et orienté selon l'axe c de la structure tétragonale (correspondant à une des directions $\langle 100 \rangle$ de la structure cubique).

- b. En-dessous de sa température de Curie, quelles sont les orientations possibles que la phase tétragonale de ce matériau peut adopter à partir d'un cristal de structure cubique ? Qu'en est-il des orientations de la polarisation ?

La transition de phase cubique – tétragonale va être telle que l'axe c correspond à l'une des 3 directions $\langle 100 \rangle$ de la structure cubique : il y a donc 3 orientations possibles.

La direction de l'axe c étant fixée, l'ion Ti^{4+} peut être décalé de 0.25\AA dans un sens ou dans l'autre. Il y a donc 6 « variants », 3 pour le choix de l'axe c , 2 pour le déplacement du titane.

- c. *Dans un domaine de Weiss où les dipôles sont tous orientés de la même manière, quelle est la polarisation résultante ? Comment est reliée cette polarisation à la polarisation à saturation du matériau ?*

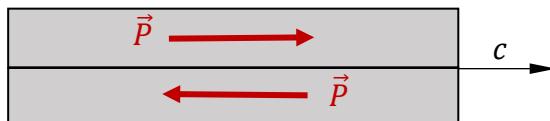
Dans un domaine de Weiss du ferroélectrique, tous les dipôles électriques ont la même orientation. La polarisation vaudra donc dans ce domaine :

$$\vec{P} = \frac{1}{V_{\text{domaine}}} \sum_i \vec{p}_i = \frac{\vec{p}}{V_{\text{maille}}}$$

$$\text{Soit: } P = \frac{p}{V_{\text{maille}}} = \frac{1.6 \times 10^{-29} \text{ Asm}}{(3.904^2 \times 4.105) \times 10^{-30} \text{ m}^3} = 0.256 \text{ As/m}^2$$

Cette polarisation d'un domaine est la même que la polarisation à saturation lorsque tous les domaines ferroélectriques ont la même orientation.

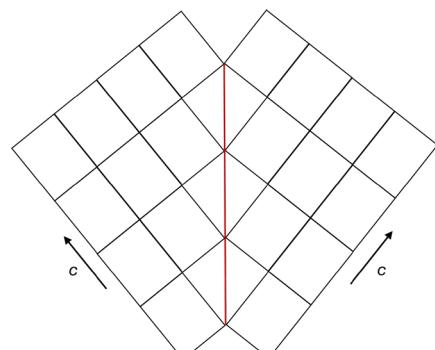
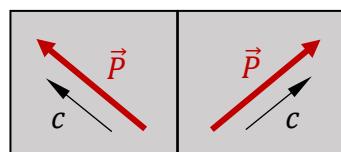
- d. *Deux domaines appelés « domaines à 180 deg. » ont le même axe c , mais avec des polarités inversées (voir dessin). Si les domaines ont la même taille, quelle est la polarisation de l'ensemble de ces deux domaines ? Quelle est la polarisation de ces deux domaines si l'on applique un champ électrique beaucoup plus grand que le champ coercitif E_C ?*



La polarisation résultante est nulle pour l'ensemble. Lorsque l'on a largement dépassé le champ électrique coercitif, tous les domaines ont la même polarisation alignée avec le champ électrique. Donc la polarisation de ces deux domaines est la même, égale à celle calculée au point (c).

- e. *Deux domaines ferroélectriques peuvent avoir leur polarisation à 90 deg. l'une de l'autre. Comment pouvez-vous accoler les deux mailles tétraédriques de ces deux domaines pour qu'une telle situation existe ?*

Deux domaines ayant une polarisation à 90 deg. l'une de l'autre ont également leurs axes c perpendiculaires. Afin de remplir l'espace, les structures tétraédriques s'arrangent ainsi (en exagérant le rapport c/a) :



Les deux domaines forment ce que l'on appelle une « mâcle » (« twin »), les deux réseaux cristallins tétraédriques étant symétriques par rapport au joint (en rouge). Ce joint correspond à des plans $\{110\}$ de la structure cubique originale.

- f. A température ambiante, lorsque le cycle d'hystérèse est bien établi, on mesure un champ coercitif $E_C \approx 2.2 \times 10^5$ V/m. La polarisation rémanente $P_R \approx 0.1$ As/m². Approximez la densité d'énergie dissipée lors d'un cycle d'hystérèse en utilisant le champ coercitif et deux approximations pour la polarisation : la polarisation rémanente et la polarisation à saturation.

La dissipation d'énergie par unité de volume est donnée par l'aire de l'hystérèse. En l'approximant par un rectangle de base $2E_C$ et de hauteur $2P_R$ ou $2P_{sat}$, la densité d'énergie dissipée par cycle vaut :

$$\Delta w_{cycle} = 4E_C P_R = 88'000 \text{ J/m}^3 \text{ ou } \Delta w_{cycle} = 4E_C P_{sat} = 225'000 \text{ J/m}^3$$

Exercice 4 : Magnétisme

- a. La différence entre un aimant doux et un aimant dur est-elle liée à : (i) leur susceptibilité magnétique ; (ii) leur aimantation résiduelle ; (iii) leur champ coercitif ?

Ce qui distingue un aimant dur d'un aimant doux est le champ coercitif, c'est-à-dire la capacité qu'a un matériau de maintenir son aimantation. Pour l'annuler, il faut un champ magnétique H dont l'intensité est égale à H_C et de direction opposée à l'aimantation.

- b. Sachant que l'énergie associée au magnétisme est du type :

$$\Delta w_{cycle} = \int_{cycle} \vec{B} d\vec{H}$$

quelle est l'unité de Δw_{cycle} et que représente cette grandeur lorsque l'aimant est caractérisé par une boucle d'hystérèse ? Où passe cette énergie lors d'un cycle ?

L'induction magnétique \vec{B} a comme unité le Tesla, soit des Vs/m². Le champ magnétique \vec{H} a comme unité des A/m, de même que l'aimantation \vec{M} qui est une densité de dipôles magnétiques, soit des (Am²/m³). La relation qui relie ces 3 entités est :

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}), \quad \text{où } \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Vs/Am}$$

Le produit de l'induction et du champ magnétique représente donc des Vs/m² A/m = J/m³. Δw_{cycle} représente donc une densité d'énergie. Si la courbe $B(H)$ présente une boucle d'hystérèse, cela signifie qu'au cours d'un cycle, de l'énergie est dissipée : la densité d'énergie est représentée par l'aire de la boucle d'hystérèse. Cette énergie passe dans une espèce de « frottement » des dipôles magnétiques lors de leur changement d'orientation. Cette énergie est dissipée sous forme de chaleur, donc d'échauffement de l'aimant.

A noter que la plasticité rencontrée dans les propriétés mécaniques est aussi non-réversible (on ne revient pas par le même chemin lors d'une charge puis décharge), mais si une partie peut être dissipée sous forme de chaleur (il suffit de plier rapidement plusieurs fois une pièce de métal pour constater son échauffement), une grande partie se retrouve sous forme d'énergie élastique emmagasinée autour des nombreuses dislocations. Ce n'est pas le cas du magnétisme où le matériau garde globalement sa morphologie.

- c. A l'aide des données fournies par les cartes d'Ashby, calculez la puissance dissipée dans un aimant en fer doux utilisé pour un transformateur à 50 Hz, le noyau en fer doux ayant un volume de 10 cm³? On assimilera la boucle d'hystérèse à un rectangle pour simplifier l'intégration.

Sur la carte d'Ashby, on peut estimer que $H_C \approx 25 \text{ A/m}$ et que $M_R \approx 3.5 \times 10^5 \text{ A/m}$. Comme l'aimantation est environ 10^4 fois plus grande que le champ coercitif, on peut négliger ce dernier dans l'expression de l'induction magnétique. Approximant le cycle d'hystérèse à un rectangle de largeur $2H_C$ et de hauteur $2M_R$, on aura :

$$\Delta w_{cycle} = \int_{cycle} \vec{B} d\vec{H} \approx 4\mu_0 M_R H_C = 44 \text{ J/m}^3$$

Pour un noyau de volume $V = 10 \text{ cm}^3$ et un cycle parcouru avec une fréquence f de 50 Hz, la puissance dissipée vaudra donc :

$$P_{dissipée} = \Delta w_{cycle} V f = 2.2 \times 10^{-2} \text{ Watt}$$

Exercice 5 : Bobine d'induction

Une bobine de cuivre est constituée de 1000 spires sur une longueur de 10 cm. Le diamètre des spires est de 6 cm et la section du fil de cuivre est de 2 mm^2 .

- a. Sachant que la résistivité du cuivre est $\rho_e = 1.7 \mu\Omega\text{cm}$, calculez la résistance de la bobine et la source de tension à laquelle il faut la brancher pour avoir un courant de 8 A.

On calcule la longueur du fil de cuivre $L_{fil} = N\pi D = 1000 \times 3.1415 \times 0.06 = 188 \text{ m}$ entrant dans la relation de la résistance électrique :

$$R = \rho_e \frac{L_{fil}}{S} = 1.7 \times 10^{-8} \Omega\text{m} \times \frac{188 \text{ m}}{2 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 1.6 \Omega$$

La source de tension est donc de $V = RI = 12.8 \text{ V}$.

- b. Calculez le champ magnétique H et l'induction magnétique B à vide au sein de la bobine.

$$B = \mu_0 \frac{NI}{L} = (1.256 \times 10^{-6} \text{ Vs/Am}) \frac{1000 \times 8 \text{ A}}{0.1 \text{ m}} = 0.1 \text{ Vs/m}^2 \quad (0.1 \text{ Tesla})$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{NI}{L} = 8 \times 10^4 \text{ A/m}$$

- c. Vous placez un petit barreau de silicium ($\chi_M = -0.41 \times 10^{-5}$) dans la bobine. Quels sont le champ magnétique et l'induction magnétique dans le silicium ? Quel est le type magnétique de ce matériau ? Que deviennent ces valeurs lorsque le barreau est sorti de la bobine ?

Le champ magnétique H dans le silicium est inchangé et sa perméabilité magnétique μ_r valant $(1 + \chi_m)$, l'induction $B = \mu_0 \mu_r H$ est très légèrement inférieure (0.0999996 T).

Effectivement, le silicium est un diamagnétique. Hors de la bobine, le champ magnétique, l'aimantation et l'induction magnétique sont nuls.

- d. Vous placez un petit barreau d'oxyde de manganèse (Mn_2O_3 , $\chi_M = 1.77 \times 10^{-2}$) dans la bobine. Quels sont le champ magnétique et l'induction magnétique dans cet oxyde ? Quel est le type magnétique de ce matériau ? Que deviennent ces valeurs lorsque le barreau est sorti de la bobine ?

Le champ magnétique H dans le silicium est inchangé. La perméabilité magnétique valant $\mu_r = 1 + \chi_m = 1.0177$, l'induction $B = \mu_0 \mu_r H$ est très légèrement augmentée (0.10177 T). Cet oxyde de manganèse est un paramagnétique. Hors de la bobine, le champ magnétique, l'aimantation et l'induction magnétique sont nuls.

- e. Vous placez un petit barreau d'un alliage Fe-Si dont les caractéristiques sont les suivantes : $H_C = 20 \text{ A/m}$, $M_S = 1.2 \times 10^6 \text{ A/m}$ et $M_R = 7 \times 10^5 \text{ A/m}$. Quel est le champ magnétique et l'induction magnétique dans ce barreau ? Quel est le type magnétique de ce matériau ?

Le champ magnétique dans la bobine étant très largement supérieur au champ coercitif, l'aimantation a atteint sa valeur de saturation. Le champ magnétique dans le barreau est inchangé mais l'induction à l'intérieur de celui-ci vaut alors :

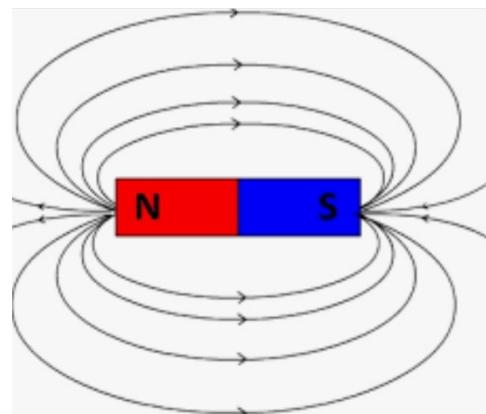
$$B = \mu_0(H + M_S) = (1.256 \times 10^{-6} \text{ Vs/Am}) \times (8 \times 10^4 + 1.2 \times 10^6) \text{ A/m} = 1.608 \text{ Vs/m}^2$$

C'est un ferromagnétique doux, le champ coercitif étant très faible.

- f. Vous sortez le barreau de Fe-Si de la bobine. Que deviennent l'aimantation, le champ magnétique et l'induction magnétique dans le barreau ? Et à l'extérieur du barreau ?

Une fois le barreau retiré de la bobine, le champ magnétique est nul, mais l'induction conserve une aimantation donnée par la valeur de rémanence, $M_R = 7 \times 10^5 \text{ A/m}$. L'induction dans le barreau vaut alors $B = \mu_0 M_R = 0.88 \text{ T}$.

A l'extérieur du barreau, cette aimantation crée des lignes de champ magnétique analogues à celles illustrées pour une bobine. Le calcul de ces lignes de champ se fait avec la résolution des équations de Maxwell (qui seront vues en 2^{ème} année).



- g. Vous placez un petit barreau d'un alliage de $\text{Sm}_2\text{Co}_{17}$ dont les caractéristiques sont les suivantes : $H_C = 1.25 \times 10^6 \text{ A/m}$, $M_S = 7.2 \times 10^5 \text{ A/m}$ et $M_R = 5 \times 10^5 \text{ A/m}$. Le barreau étant supposé avoir une magnétisation initiale nulle, quel est le champ magnétique et l'induction magnétique dans ce barreau ? Pour faire le calcul lors de cette première magnétisation, faites l'hypothèse que la susceptibilité magnétique est donnée par le rapport M_R/H_C . Quel est le type magnétique de ce matériau ?

La susceptibilité de ce matériau lors de la première aimantation est approximée par $\chi_M = M_R/H_C = 0.4$. Donc, $\mu_r = 1.4$. Le champ magnétique est toujours le même, mais l'induction dans le matériau vaut $B = \mu_0 \mu_r H = 0.14 \text{ T}$. C'est un ferromagnétique dur, le champ coercitif est très élevé.

- h. Vous sortez le barreau de $\text{Sm}_2\text{Co}_{17}$ de la bobine. Que deviennent l'aimantation, le champ magnétique et l'induction magnétique dans le barreau ? Et à l'extérieur du barreau ?

Même si l'on n'a pas réussi à saturer l'aimantation du barreau car le champ magnétique de la bobine est trop faible, le barreau hors de la bobine va conserver une aimantation proche de la valeur acquise dans la bobine. Le champ magnétique dans le barreau est maintenant nul et

l'induction $B = \mu_0 M = 0.04$ T. A l'extérieur du barreau, les lignes de champ magnétique sont analogues à celles illustrées au point (f).